Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass ein System $\mathcal{A}$ von Untermengen einer Menge Ω genau dann eine σ-Algebra über Ω ist, wenn gilt:

$$\text{(i) } \Omega \in \mathcal{A}, \quad \text{(ii) } A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}, \quad \text{(iii) } A_n \in \mathcal{A},\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über einer Menge Ω, und $\Omega' \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass das System

$$\mathcal{A} \cap \Omega' := \{A \cap \Omega' \,:\, A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über Ω' definiert.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei Ω eine nicht-leere Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Beweisen Sie: Es gibt

- einen Ring $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}(\mathcal{E})$
- eine Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}(\mathcal{E})$
- einen σ-Ring $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}(\mathcal{E})$
- eine σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$

derart dass für jede weitere Wahl von

- einem Ring $\mathcal{R}'$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}'$
- einer Algebra $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}'$
- einem σ-Ring $\mathcal{S}'$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}'$
- einer σ-Algebra $\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}'$

bereits gilt

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{R}', \quad \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}', \quad \mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}', \quad \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}'.$$

Aufgabe 4 *(6 Punkte)*
Sei μ ein endlich additives Maß auf einem Ring $\mathcal{R}$ über einer Menge Ω. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Seien $A, B \in \mathcal{R}$, dann gilt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$;

(b) Seien $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subset B$, dann gilt $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;

(c) Seien $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{R}$, dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu\left(A_n\right);$$

(d) Sei $(A_n)_n \subset \mathcal{R}$ eine Folge paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$